

## FORMULACIÓN Y ENSAMBLAJE DE ELEMENTOS FINITOS JERÁRQUICOS PARA EL ANÁLISIS ESTÁTICO Y DINÁMICO DE PLACAS CUADRILÁTERAS LAMINADAS

Rita F. Rango\* (1); Liz G. Nallim (2); Sergio Oller (3)

### Resumen

En este trabajo se presenta la formulación y el proceso de ensamblaje de elementos finitos enriquecidos con polinomios ortogonales de Gram-Schmidt para el estudio de placas. A través del proceso de ensamblaje es posible realizar el análisis estático y de vibraciones libres de placas laminadas de forma geométrica genérica, cuya superficie se subdivide o malla en macroelementos finitos cuadriláteros. Para considerar distintas formas geométricas se utiliza una aproximación isoparamétrica y posteriormente los elementos son ensamblados. Las matrices de masa y de rigidez, y el vector de fuerzas elementales, son ordenados identificando grados de libertad nodales, de borde y puramente internos, para llegar a las matrices y vector globales de la estructura. La formulación obtenida permite trabajar con cualquier combinación de condiciones de borde clásicas, apoyos puntuales, lados simplemente apoyados, empotrados o libres. Así, se llega a una formulación general implementada en un programa computacional de elementos finitos, para determinar frecuencias naturales, formas modales asociadas y deflexiones estáticas de estructuras tipo placa. Además, se estudia la convergencia y estabilidad de los resultados, lo que permite concluir que esta metodología produce soluciones estables y convergentes. La principal ventaja del método desarrollado es que no requiere densificar el mallado en el dominio de la geometría de la placa para mejorar la aproximación. *Palabras clave: placas laminadas, elemento finito enriquecido, ensamblaje, análisis estático, vibración libre*

---

(1) Ingeniera Civil, ICMASa, INIQI (CONICET), Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta, Salta, Argentina. ritarango@conicet.gov.ar

(2) Doctora Ingeniera, ICMASa, INIQI (CONICET), Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta, Salta, Argentina. lnallim@unsa.edu.ar

(3) Doctor Ingeniero, CIMNE, Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España. sergio.oller@upc.edu

\* Corresponding author

## 1. INTRODUCCIÓN

En el presente artículo se presenta el desarrollo un elemento finito jerárquico para placas laminadas a partir de la extensión de una formulación desarrollada por los autores (Rango et al. 2009). Además, se avanza en el proceso de ensamblaje de los elementos formulados y se analiza la eficiencia del mallado de estructuras de laminadas de diferentes geometrías. Para la formulación del elemento mencionado se utilizan funciones de forma clásicas, enriquecidas con la incorporación de polinomios ortogonales de Gram-Schmidt. La metodología de ensamblado se desarrolla y se aplica al estudio de la vibración libre y análisis estático de placas elásticas y de espesor uniforme. El programa desarrollado permite trabajar con placas cuadriláteras de cualquier forma geométrica, ya que incluye el mapeo de espacios. También se pueden determinar las frecuencias naturales, sus formas modales asociadas y la respuesta estática debido a cargas perpendiculares al plano medio. El análisis incluye un estudio de convergencia variando el número de polinomios de Gram-Schmidt, que permite concluir que la formulación produce soluciones estables y convergentes.

## 2. FORMULACIÓN MATEMÁTICA

En general, el Método de los Elementos Finitos (MEF) puede considerarse como un caso especial del Método de Rayleigh - Ritz (Zienkiewicz 1980, Oñate 1992). La principal diferencia radica en la selección de las funciones admisibles usadas en las series que aproximan la solución. Normalmente, la estructura se divide en un número de sub-dominios más pequeños, llamados elementos finitos. Así, la solución se aproxima por funciones (polinomios) localmente admisibles.

La precisión de la solución puede ser mejorada de dos maneras. La primera, y más común, es refinar la malla de elementos finitos, manteniendo el mismo grado de los elementos usados. Esta forma es conocida como la versión clásica o versión-h del MEF. La segunda forma consiste en fijar un tamaño de malla e incrementar el grado de las funciones polinómicas de aproximación. Este enfoque se conoce como versión-p del MEF, o Método de los Elementos Finitos Jerárquicos (Bardell 1995).

Más recientemente, una versión híbrida, llamada versión h-p, ha sido desarrollada mediante la unión de los dos conceptos previos. En esta idea se basa el desarrollo que se presenta en este artículo. Con este fin, los primeros cuatro modos de desplazamiento cúbicos usados en la versión h se mantienen, mientras que los modos de orden más alto ( $r > 4$ ) se derivan de los polinomios de Gram-Schmidt.

Fijado un mallado de la estructura, se obtienen buenos resultados usando la cantidad de polinomios que asegure la precisión deseada, acelerando así el proceso de cálculo, ya que se trabaja con un reducido número de macroelementos.

Así, el campo de desplazamientos se define con los polinomios de Hermite y con polinomios ortogonales de Gram-Schmidt para obtener un macroelemento finito jerárquico MEF hp.

Los polinomios ortogonales fueron usados ya por investigadores para analizar el comportamiento mecánico de diferentes tipos de placas. Su empleo en el estudio de placas resulta muy satisfactorio, como ha sido demostrado en distintos trabajos (Nallim et al. 2003; Nallim et al. 2005; Nallim and Oller 2008) donde los procedimientos presentan una rápida convergencia a la solución, prácticamente sin oscilaciones.

### 2.1. Polinomios ortogonales

Los polinomios de Gram-Schmidt, en cada dirección en el plano, se generan utilizando un polinomio base que satisface las condiciones de contorno geométricas correspondientes a una viga biempotrada. Así, si se utiliza como sistema de referencia las coordenadas naturales  $\xi, \eta$  (ver Figura 1), el primero de estos polinomios para la dirección  $\xi$  resulta:

$$p_5(\xi) = 1 - 2\xi^2 + \xi^4 \quad (1)$$

En la Ec.(1) se utiliza el subíndice 5 para el primer polinomio (polinomio base) porque los cuatro primeros corresponden a los polinomios de Hermite. El polinomio dado por la Ec. (1) es el más simple y de menor grado que satisface las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} p_5(\xi) \Big|_{\xi=-1} &= p_5(\xi) \Big|_{\xi=1} = 0, \\ [\partial p_5(\xi) / \partial \xi]_{\xi=-1} &= [\partial p_5(\xi) / \partial \xi]_{\xi=1} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Los demás polinomios del conjunto  $\{p_i(\xi)\}$  para  $i = 6, \dots, N$  se generan utilizando el procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt:

$$\begin{aligned} p_6(\xi) &= (\xi - B_6)p_5(\xi), \\ p_k(\xi) &= (\xi - B_k)p_{k-1}(\xi) - C_k p_{k-2}(\xi), \quad k = 7, \dots, N \end{aligned} \quad (3)$$

donde:

$$B_k = \frac{\int_{-1}^1 \xi (p_{k-1}(\xi))^2 d\xi}{\int_{-1}^1 (p_{k-1}(\xi))^2 d\xi}, \quad C_k = \frac{\int_{-1}^1 \xi p_{k-1}(\xi) p_{k-2}(\xi) d\xi}{\int_{-1}^1 (p_{k-2}(\xi))^2 d\xi}$$

Luego, los coeficientes de los polinomios son recalculados de manera que los mismos resulten ortonormales:

$$\int_{-1}^1 p_k^2(\xi) d\xi = 1 \quad (4)$$

Los polinomios correspondientes a la coordenada  $\eta$  se generan usando el mismo procedimiento.

La generación de estos polinomios con las fórmulas de recurrencia dadas por las Ecs. (3) garantiza que todas las aproximaciones de orden mayor o igual que cinco tengan desplazamiento y pendiente nulos en cada extremo del elemento. Esta característica es particularmente importante ya que estos modos sólo contribuyen o aportan al campo de desplazamiento interior del elemento y, por consiguiente, no afectan al desplazamiento a lo largo del borde del mismo. Sin embargo, cuando cualquiera de estos modos se usa junto con los de Hermite, éstos se sumarán a los grados de libertad a lo largo del borde del elemento. Por lo tanto, se puede simular condiciones de borde clásicas y, para juntas internas, o lados comunes a dos elementos, garantizar que las interfaces elemento-elemento sean conformadas totalmente.

De acuerdo a lo expresado anteriormente, la componente del desplazamiento correspondiente a la dirección  $z$  (perpendicular al plano de coordenadas naturales  $\xi, \eta$ ) está dada por:

$$w = w_h + w_p \quad (5)$$

donde  $w_h$  corresponde a la contribución de la combinación de los polinomios de Hermite, que trabajan como funciones de forma (de soporte local) y  $w_p$  es la parte de la componente del campo de desplazamientos que corresponde a la contribución de los polinomios ortogonales generados.

A su vez,  $w_h$  está dada por:

$$w_h = w_h(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 c_{ij} p_i(\xi) q_j(\eta) \quad (6)$$

donde  $c_{ij}$  son coordenadas generalizadas que, en este caso (por tratarse de una expresión que vincula funciones de forma), tienen un significado asociado a los desplazamientos nodales y sus correspondientes derivadas.

Resulta claro y directo que las primeras combinaciones de las cuatro funciones que provienen del MEF dan los aportes nodales para desplazamientos, derivadas primeras  $\partial/\partial\xi$ ,  $\partial/\partial\eta$  y derivadas cruzadas  $\partial^2/\partial\xi\partial\eta$  de los cuatro nodos de esquina (ver Figura 1).

## 2.2. Aproximación de la geometría de la placa

La formulación desarrollada puede aplicarse a una placa cuadrilátera de cualquier forma, de lados rectos, de espesor uniforme y sujeta a pequeños desplazamientos. El material de la placa es elástico y anisótropo, incluyendo laminados simétricos respecto al plano medio. En este caso, los movimientos de flexión y de membrana están desacoplados. La placa, como se dijo, tiene una forma arbitraria que en coordenadas cartesianas  $(x, y)$  representa un dominio  $R$ . Las expresiones analíticas correspondientes a esta placa pueden ser expresadas en otras variables mediante el uso de una aplicación que transforma un dominio cuadrado  $\tilde{R}$  en el dominio  $R$ . El dominio  $\tilde{R}$  corresponde a la placa de referencia o elemento generatriz y está definido en sus coordenadas naturales por las ecuaciones de su contorno  $\xi = \pm 1$  y  $\eta = \pm 1$  (ver Figura 1). La aplicación que realiza la transformación entre  $R$  y  $\tilde{R}$ , o lo que es equivalente, entre  $(x, y)$  y  $(\xi, \eta)$  está dada por (Zienkiewicz 1980; Reddy 1993):

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i \quad (7)$$

donde  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, 4$  son las coordenadas de las cuatro esquinas de la región cuadrilátera  $R$  y  $N_i(\xi, \eta)$  son las funciones lineales de interpolación o funciones de forma que definen la geometría del elemento, y que están dadas por:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \eta_i \eta) (1 + \xi_i \xi) \quad (8)$$

donde  $\xi_i$  y  $\eta_i$  son las coordenadas naturales de la  $i$ -ésima esquina.

Las Ecs. (7) relacionan las coordenadas cartesianas  $(x, y)$  de un punto con las naturales  $(\xi, \eta)$ . Dicha relación debe ser biunívoca, para lo cual debe cumplirse que el determinante de la matriz Jacobiano de la transformación de coordenadas  $x, y \rightarrow \xi, \eta$  (dicha matriz se define más adelante) sea de signo constante en todos los puntos del dominio transformado.

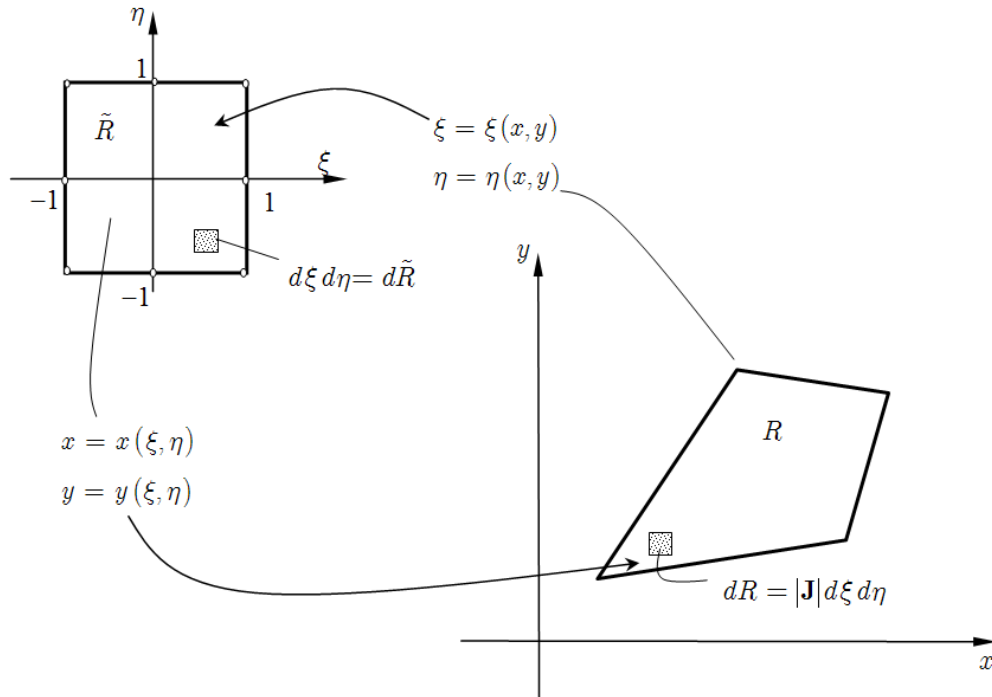


Figura 1: Transformación de espacios. A la derecha: placa real. A la izquierda: placa de referencia

El objetivo de la transformación de espacios es aplicar la metodología en la placa cuadrada de referencia. Para ello, es necesario escribir todas las derivadas que aparecerán más adelante en las coordenadas naturales  $(\xi, \eta)$ , que son las variables en las que se resuelve el problema. Mediante la aplicación sucesiva de la regla de derivación de funciones compuestas se obtienen las siguientes expresiones (Nallim and Oller 2008, Rango et al. 2009):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{J_{22}}{|J|} & -\frac{J_{12}}{|J|} \\ -\frac{J_{21}}{|J|} & \frac{J_{11}}{|J|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (9)$$

donde  $J$  es la matriz jacobiana y sus elementos son:

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i N_{i,\xi} & \sum y_i N_{i,\xi} \\ \sum x_i N_{i,\eta} & \sum y_i N_{i,\eta} \end{bmatrix} \quad (10)$$

y  $|J|$  es el determinante del Jacobiano de la transformación de coordenadas naturales a cartesianas.

Mientras que para las expresiones que intervienen en las curvaturas se obtiene (Rango et al. 2009):

$$\left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^T = [Op^{(1)}] \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right]^T + [Op^{(2)}] \left[ \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} \right]^T \quad (11)$$

donde  $[Op^{(1)}]$  y  $[Op^{(2)}]$  son los operadores que permiten realizar la transformación de espacios y están dados por:

$$[Op^{(1)}] = \begin{bmatrix} a_1' & a_2' & -a_3' \\ b_1' & b_2' & -b_3' \\ -c_1' & -c_2' & c_3' \end{bmatrix} \quad [Op^{(2)}] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 a_i' \alpha_i' & \sum_{i=1}^3 a_i' \beta_i' \\ \sum_{i=1}^3 b_i' \alpha_i' & \sum_{i=1}^3 b_i' \beta_i' \\ -\sum_{i=1}^3 c_i' \alpha_i' & -\sum_{i=1}^3 c_i' \beta_i' \end{bmatrix} \quad (12)$$

donde:

$$a_1' = \frac{J_{22}^2}{|J|^2}, \quad a_2' = \frac{J_{12}^2}{|J|^2}, \quad a_3' = 2 \frac{J_{12} J_{22}}{|J|^2}$$

$$b_1' = \frac{J_{21}^2}{|J|^2}, \quad b_2' = \frac{J_{11}^2}{|J|^2}, \quad b_3' = 2 \frac{J_{11} J_{21}}{|J|^2}$$

$$c_1' = \frac{J_{21} J_{22}}{|J|^2}, \quad c_2' = \frac{J_{11} J_{12}}{|J|^2}, \quad c_3' = \frac{J_{11} J_{22} + J_{12} J_{21}}{|J|^2}$$

$$\alpha_1' = \frac{-J_{11,\xi} J_{22} + J_{12,\xi} J_{21}}{|J|}, \quad \alpha_2' = \frac{-J_{21,\eta} J_{22} + J_{22,\eta} J_{21}}{|J|}, \quad \alpha_3' = \frac{J_{11,\eta} J_{22} - J_{22,\xi} J_{21}}{|J|}$$

$$\beta_1' = \frac{J_{11,\xi} J_{12} - J_{12,\xi} J_{11}}{|J|}, \quad \beta_2' = \frac{J_{21,\eta} J_{12} - J_{22,\eta} J_{11}}{|J|}, \quad \beta_3' = \frac{-J_{11,\eta} J_{12} + J_{22,\xi} J_{11}}{|J|}$$

### 3. MATRIZ DE RIGIDEZ

Para determinar las frecuencias de vibración libre y realizar el análisis estático y dinámico de una estructura de placa cualquiera, el primer paso consiste en encontrar las matrices de masa y de rigidez, y el vector de fuerzas del macroelemento. Posteriormente los macroelementos son ensamblados de acuerdo a las conectividades entre sus lados.

Se adopta el elemento de placa delgada, cuadrilátero, de espesor  $h$ , que se muestra en la Figura 1, cuyo dominio en el plano resulta limitado por las rectas que unen sus esquinas consecutivas, a través de las coordenadas  $(x, y)$  de las mismas. Asumiendo válidas las hipótesis de Kirchhoff para placas delgadas, el campo de desplazamientos está dado por:

$$u = -z \partial w / \partial x, \quad v = -z \partial w / \partial y, \quad w = w_0 \quad (13)$$

donde  $u, v$  son las componentes de desplazamiento en el plano y  $w$  es el desplazamiento transversal, el cual coincide con los desplazamientos transversales de los puntos ubicados en el plano medio ( $w_0$ ).

De acuerdo a las componentes del campo de desplazamiento dadas por las Ec. (13), se obtienen las siguientes componentes de deformación:

$$\varepsilon_x = -z \partial^2 w / \partial x^2, \quad \varepsilon_y = -z \partial^2 w / \partial y^2, \quad \gamma_{xy} = -2z \partial^2 w / \partial x \partial y \quad (14)$$

La relación entre las tensiones y las deformaciones, para la lámina  $k$ -ésima de una placa anisótropa laminada (Figura 2), puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^{(k)} \quad (15)$$

donde  $\bar{Q}_{ij} (i, j = 1, 2, 6)$  son las rigideces reducidas transformadas (Reddy 1997).

La energía de deformación está dada por:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV \quad (16)$$

donde  $V$  es el volumen de la placa laminada.

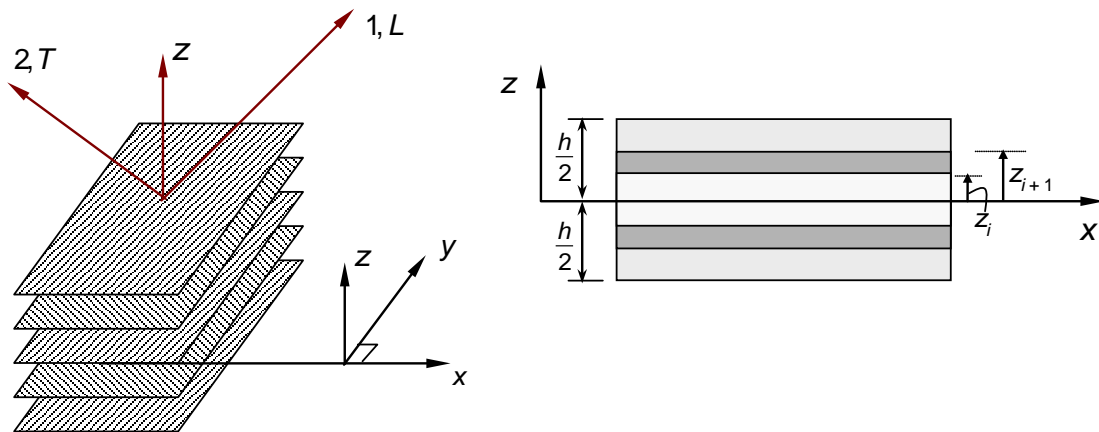


Figura 2: Esquema de laminación y definición del sistema de coordenadas cartesianas en un laminado simétrico

Si se reemplaza en la Ec. (16) la correspondiente relación constitutiva dada por la Ec. (15) y las expresiones de las deformaciones específicas dadas por las Ecs. (14), se obtiene la expresión de la energía de deformación de la placa:

$$\begin{aligned}
U = \frac{1}{2} \iiint_V & \left[ \bar{Q}_{11}^{(k)} z^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\bar{Q}_{12}^{(k)} z^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \right. \\
& + \bar{Q}_{22}^{(k)} z^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4\bar{Q}_{16}^{(k)} z^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 4\bar{Q}_{26}^{(k)} z^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \\
& \left. + 4\bar{Q}_{66}^{(k)} z^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy dz
\end{aligned} \quad (17)$$

Si se efectúa la integración a lo largo del eje  $z$ , perpendicular al plano medio de la placa (ver Figura 2), considerando que no existen cargas en el plano, sólo es necesario analizar los casos de flexión por carga transversal, por lo que al trabajar con pequeños desplazamientos se obtiene para una placa anisótropa la siguiente expresión para la energía de deformación por flexión transversal de una placa anisótropa:

$$\begin{aligned}
U = \frac{1}{2} \iint_R & \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\
& \left. + 4D_{16} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 4D_{26} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy
\end{aligned} \quad (18)$$

donde  $D_{ij}$  denotan las rigideces flexionales  $D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} z^2 dz$

La Ec. (18) se puede expresar matricialmente de la siguiente manera:

$$U = \frac{1}{2} \iint_R \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} dx dy \quad (19)$$

Por otra parte, la aproximación del campo de desplazamientos del elemento dada por la Ec. (5) puede representarse mediante una serie finita de  $M$  modos en la dirección  $\xi$ , y  $N$  modos en la dirección  $\eta$ :

$$w(\xi, \eta) = \sum_1^M \sum_1^N c_{ij} p_i(\xi) q_j(\eta) = [N(\xi, \eta)] \{c\} \quad (20)$$

donde  $[N(\xi, \eta)]$  es el vector fila de las funciones de forma, dado por:



$$\begin{aligned}
[N(\xi, \eta)] = & [p_1q_1, p_1q_2, p_1q_3, p_1q_4, p_1q_5, \dots, p_1q_N, \\
& p_2q_1, p_2q_2, p_2q_3, p_2q_4, p_2q_5, \dots, p_2q_N, \\
& p_3q_1, p_3q_2, p_3q_3, p_3q_4, p_3q_5, \dots, p_3q_N, \dots, \\
& p_Mq_1, p_Mq_2, p_Mq_3, p_Mq_4, p_Mq_5, \dots, p_Mq_N]
\end{aligned} \tag{21}$$

y:

$$\{c\} = \{c_{11}, c_{12}, c_{13}, \dots, c_{1N}, c_{21}, c_{22}, c_{23}, \dots, c_{2N}, c_{M1}, c_{M2}, c_{M3}, \dots, c_{MN}\}_{(M*N)*1} \tag{22}$$

con:

$$p_i = p_i(\xi), \quad q_j = q_j(\eta) \quad \begin{cases} i, j = 1 \dots 4 & \text{polinomios cúbicos de Hermite} \\ i, j > 4 & \text{polinomios de Gram-Schmidt} \end{cases}$$

A partir de la expresión clásica de la energía de deformación dada por la Ec. (19) y las Ecs. (20) y (21), se obtiene la matriz de rigidez del elemento:

$$U = \frac{1}{2} \{c\}^T \iint_R \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} |J| d\xi d\eta \{c\} \tag{23}$$

donde:

$$B_1 = a_1 \frac{\partial^2 N_{\xi\eta}}{\partial \xi^2} + a_2 \frac{\partial^2 N_{\xi\eta}}{\partial \eta^2} - a_3 \frac{\partial^2 N_{\xi\eta}}{\partial \xi \partial \eta} + \sum_{i=1}^3 a_i \alpha_i \frac{\partial N_{\xi\eta}}{\partial \xi} + \sum_{i=1}^3 a_i \beta_i \frac{\partial N_{\xi\eta}}{\partial \eta}$$

$$B_2 = b_1 \frac{\partial^2 N_{\xi\eta}}{\partial \xi^2} + b_2 \frac{\partial^2 N_{\xi\eta}}{\partial \eta^2} - b_3 \frac{\partial^2 N_{\xi\eta}}{\partial \xi \partial \eta} + \sum_{i=1}^3 b_i \alpha_i \frac{\partial N_{\xi\eta}}{\partial \xi} + \sum_{i=1}^3 b_i \beta_i \frac{\partial N_{\xi\eta}}{\partial \eta}$$

$$B_3 = -c_1 \frac{\partial^2 N_{\xi\eta}}{\partial \xi^2} - c_2 \frac{\partial^2 N_{\xi\eta}}{\partial \eta^2} + c_3 \frac{\partial^2 N_{\xi\eta}}{\partial \xi \partial \eta} - \sum_{i=1}^3 c_i \alpha_i \frac{\partial N_{\xi\eta}}{\partial \xi} - \sum_{i=1}^3 c_i \beta_i \frac{\partial N_{\xi\eta}}{\partial \eta}$$

A partir de la Ec. (23), la matriz de rigidez del elemento en su forma de elementos finitos resulta dada por:

$$[K^E] = \iint_R \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} |J| d\xi d\eta \tag{24}$$

#### 4. MATRIZ DE MASA

La matriz de masa del elemento se obtiene a partir de la expresión de la energía cinética, que en coordenadas cartesianas  $(x, y)$  está dada por:

$$T = \frac{1}{2} \iint_R \rho h \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (25)$$

donde  $W = w \text{sen}(\omega t)$ . Esta expresión reemplazada en la Ec. (25) permite encontrar la energía cinética máxima correspondiente a un ciclo vibratorio, dada por:

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \rho h \omega^2 \iint_R w^2 dx dy \quad (26)$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \{c\}^T \left[ \rho h \omega^2 \iint_R [N_{xy}]^T [N_{xy}] dx dy \right] \{c\} \quad (27)$$

De manera análoga a lo desarrollado para la matriz de rigidez, la matriz de masa en coordenadas naturales se obtiene a partir de la Ec. (27) como:

$$[M^E] = \rho h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N_{\xi\eta}]^T [N_{\xi\eta}] J |d\xi d\eta \quad (28)$$

#### 5. VECTOR DE FUERZAS

El vector de fuerzas correspondiente a una carga transversal  $q(x, y)$  aplicada sobre el macro elemento completo, se obtiene a partir de la expresión de la energía potencial, que en coordenadas cartesianas  $(x, y)$  está dada por:

$$V = \iint_R q w dx dy \quad (29)$$

Reemplazando la Ec. (20) en la Ec. (29), trabajando en coordenadas naturales y considerando como caso particular una carga uniformemente distribuida, resulta:

$$V = q \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N_{\xi\eta}] \{c\} J |d\xi d\eta = q \{c\}^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N_{\xi\eta}]^T J |d\xi d\eta \quad (30)$$

De donde se obtiene:

$$[F^E] = q \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N_{\xi\eta}]^T J |d\xi d\eta \quad (31)$$

## 6. PROBLEMA DE AUTOVALORES Y ECUACIÓN DE EQUILIBRIO ESTÁTICO

Los macroelementos finitos obtenidos no pueden ser meramente superpuestos para formar las matrices globales de rigidez y de masa, así como el vector global de fuerzas para el análisis de flexión estática. Debe prestarse atención a la estructura interna de cada macroelemento en la matriz de rigidez, luego, esta estructura se relaciona con la matriz de masa y con el vector de fuerzas (Bardell et al. 1995, Bardell et al. 1996). Cada fila y columna de la matriz  $[K^E]$  corresponden a un determinado grado de libertad  $c_{ij}$ . El primer paso en el proceso de ensamblaje es separar estos grados de libertad en nodales ( $N$ ), de borde ( $B$ ) y puramente internos ( $I$ ), y luego reordenar las correspondientes entradas en los elementos de la matriz de rigidez para llegar a una matriz equivalente:

$$[K^E] = \begin{bmatrix} [NN] & [NB] & [NI] \\ [BN] & [BB] & [BI] \\ [IN] & [IB] & [II] \end{bmatrix} \quad (32)$$

Las distintas condiciones de contorno se aplican a la placa ensamblada eliminando de las matrices de rigidez global  $[K^G]$  y masa global  $[M^G]$  las filas y columnas que corresponden a los grados de libertad asociados a las correspondientes condiciones de contorno. Esto brinda notoria flexibilidad en su uso, y permite usar un macroelemento simple apropiado.

A partir de las matrices globales de masa y rigidez se obtienen las frecuencias naturales de vibración libre de la estructura, mediante la sustitución en la ecuación de Lagrange:

$$\{[K^G] - \omega^2[M^G]\}\{c_{ij}^G\} = 0 \quad (33)$$

En correspondencia con cada autovalor  $\omega^2$  se tienen los autovectores  $\{c_{ij}^G\}$ . Un vector  $\{c_{ij}^G\}$  contiene coeficientes nodales, internos y de borde para cada macroelemento de la malla de la estructura. Se deduce entonces que hay valores de  $\{c_{ij}^G\}$  comunes a dos o más elementos. Por lo tanto, el movimiento de cualquier punto  $(\xi, \eta)$  de cada macroelemento puede calcularse sustituyendo el autovector  $\{c_{ij}^E\}$  apropiado junto con las funciones de forma asociadas  $p_i (i=1, \dots, M)$  y  $q_j (j=1, \dots, N)$  en la Ec. (20). Así, se puede graficar la superficie deformada de cada elemento de la estructura, satisfaciendo las condiciones de borde y continuidad entre ellos, y obteniendo la deformada de la estructura completa. Mediante la transformación inversa de coordenadas, la superficie deformada se grafica en coordenadas cartesianas  $(x, y)$  utilizando como datos las coordenadas reales de la estructura mallada.

Para el análisis de flexión por carga transversal, la ecuación matricial que define la relación entre las cargas actuantes en los elementos y los desplazamientos que éstas originan en la estructura viene dada por:

$$[K^G]\{c_{ij}^G\} = [F^G] \quad (34)$$

Es necesario también, por ende, ensamblar el vector de fuerzas actuantes en cada macroelemento para encontrar el vector  $\{c_{ij}^E\}$  de cada uno, y así hallar análogamente al caso dinámico, la deformada de la placa completa mediante el uso de la Ec. (20).

## 7. ESTUDIO DE CONVERGENCIA

La formulación obtenida fue implementada en un programa de computadora. Para analizar la confiabilidad de la metodología implementada, se realiza a continuación un estudio de convergencia y verificación de las frecuencias naturales de vibración y de las deflexiones estáticas de una placa dividida en dos macroelementos de distintas geometrías. Se considera un material elástico isótropo con coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ . La estructura tiene cuatro apoyos puntuales, en las esquinas 3 y 4 del elemento placa A, y en las esquinas 1 y 2 del elemento placa B (ver Figura 3).

El estudio de convergencia se lleva a cabo incrementando el número de términos correspondiente a los polinomios de Gram-Schmidt utilizados para enriquecer la función de aproximación. El programa calcula las matrices elementales de rigidez y de masa, y los vectores elementales de fuerza y luego los ensambla a partir de igualar los desplazamientos y giros que se relacionan con el lado que comparten los dos elementos. Las condiciones de borde son tenidas en cuenta, como se dijo, en las matrices y vector globales de la estructura.

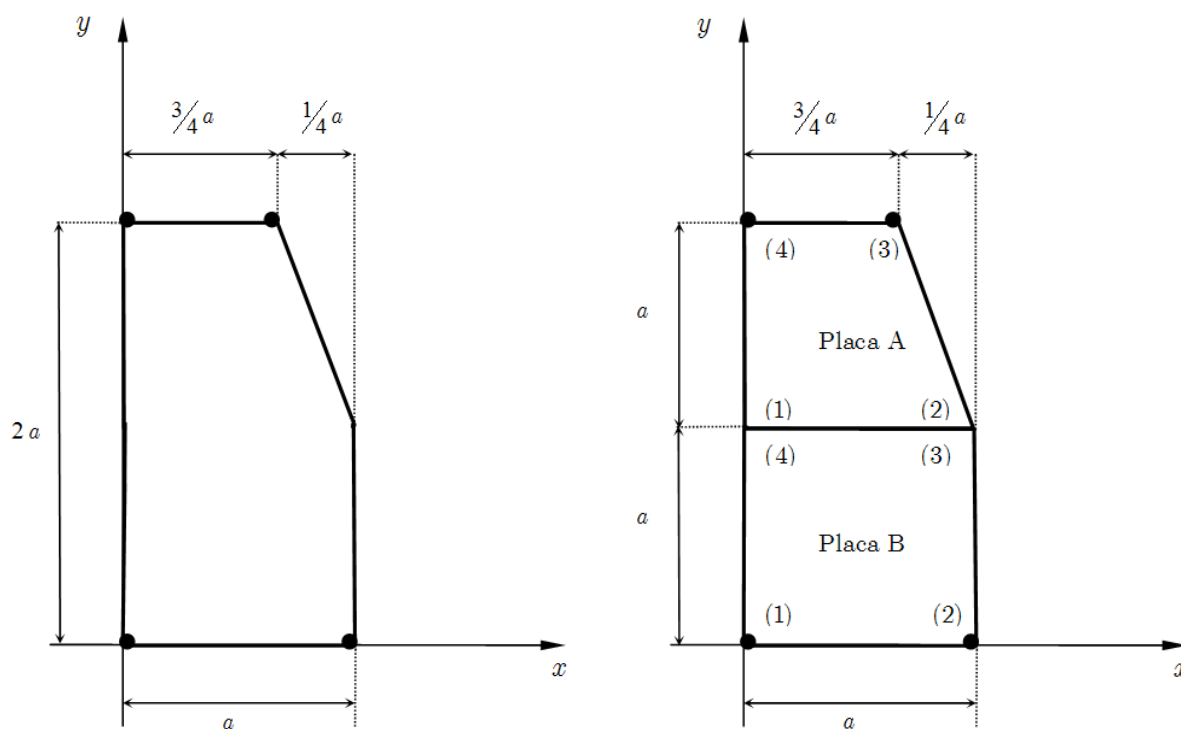


Figura 3: A la izquierda: placa para estudio de convergencia. A la derecha: placa discretizada en macroelementos

En la Tabla 1 se resumen los valores obtenidos para las cuatro primeras frecuencias de vibración libre de la estructura, usando desde un polinomio de Gram-Schmidt hasta tres, y se muestran los valores de referencia que se obtienen del análisis con elementos finitos convencionales llevado a cabo con el programa SAP 2000 versión 10 (CSI Analysis Reference Manual 2004), que se realizó mallando la estructura en 200 elementos finitos clásicos. Se puede observar que a partir del uso de dos polinomios de Gram-Schmidt las frecuencias correspondientes tienden a estabilizarse, observándose además convergencia estable y sin oscilaciones. Por lo tanto, se puede concluir que el uso de dos polinomios de Gram-Schmidt produce muy buenos resultados.

Tabla 1: Valores de los cuatro primeros coeficientes de frecuencias  $\Omega_i = \omega_i a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$  de la estructura de Fig. 3

Nº polinomios	Frecuencia 1	Frecuencia 2	Frecuencia 3	Frecuencia 4
5	2,33444	6,94634	8,64661	14,71341
6	2,33429	6,93137	8,64058	14,53915
7	2,33421	6,93130	8,63918	14,52755
Valor SAP (200 elementos)	2,33076	6,75273	8,65357	14,38109

En el caso de las deflexiones estáticas en la estructura, los resultados adimensionalizados son los que muestra la Tabla 2. Análogamente, se observa una convergencia estable y muy buena concordancia con los resultados obtenidos cuando se usan elementos finitos en su versión  $h$ .

Tabla 2: Valores de los coeficientes de deflexión  $\tilde{w}_{(x_i, y_i)} = w_{(x_i, y_i)} \frac{D}{qa^4}$  de la estructura de Fig. 3

Nº polinomios	punto $a$ (0.5a , 0)	punto $b$ (a , 0.5a)	punto $c$ (a , a)	punto $d$ (0.8a, 1.8a)
5	0,02571	0,16359	0,22890	0,07628
6	0,02571	0,16359	0,22889	0,07645
7	0,02566	0,16354	0,22886	0,07657
Valor SAP (200 elem.)	0,02511	0,16954	0,24003	0,078367
Nº polinomios	punto $e$ (0.375a , 2a)	punto $f$ (0 , 1.5a)	punto $g$ (0 , a)	punto $h$ (0 , 0.5a)
5	0,00936	0,17479	0,24469	0,17437
6	0,00939	0,17482	0,24473	0,17438
7	0,00936	0,17483	0,24474	0,17438
Valor SAP (200 elem.)	0,00885	0,17008	0,23737	0,16967

## 8. RESULTADOS NUMÉRICOS

Se presentan a continuación las frecuencias naturales y las deflexiones estáticas en determinados puntos debidas a una carga transversal uniformemente distribuida, correspondientes a la placa que se muestra en la Figura 4a, considerando algunos lados empotrados y libres, y material isótropo con coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$  y laminado de tres capas de E-glass/epoxi, con secuencia de apilamiento  $(0, \beta, 0)$ . Las propiedades de los materiales componentes son:  $E_1 = 60.7GPa$ ,  $E_2 = 24.8GPa$ ,  $G_{12} = 12GPa$  y  $\nu_{12} = 0.23$ .

En este caso, la placa ha sido discretizada en tres macroelementos como se observa en la Figura 4b. Los resultados se obtuvieron usando los cuatro polinomios de Hermite más dos polinomios de Gram-Schmidt.

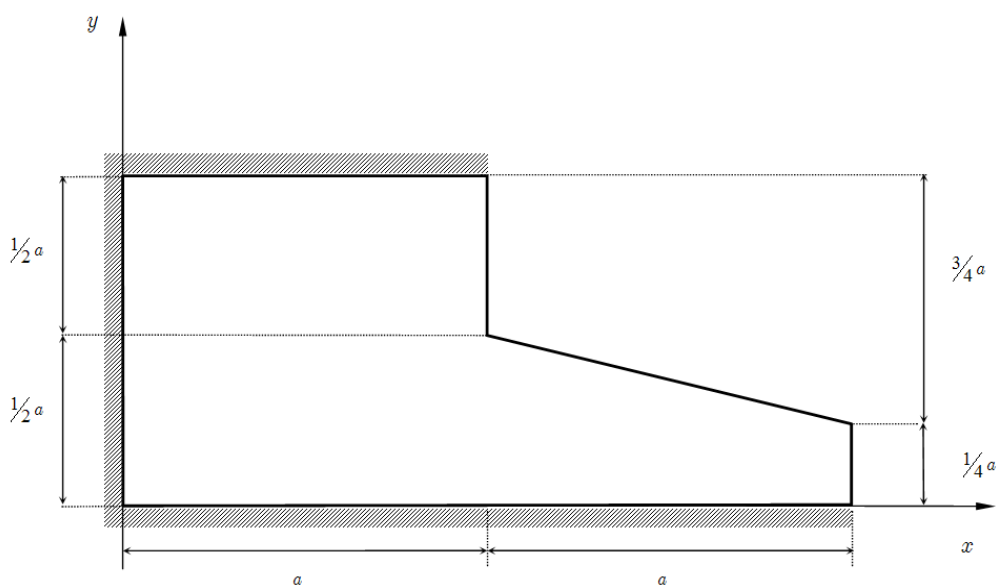


Figura 4a: Placa con lados empotrados y libres

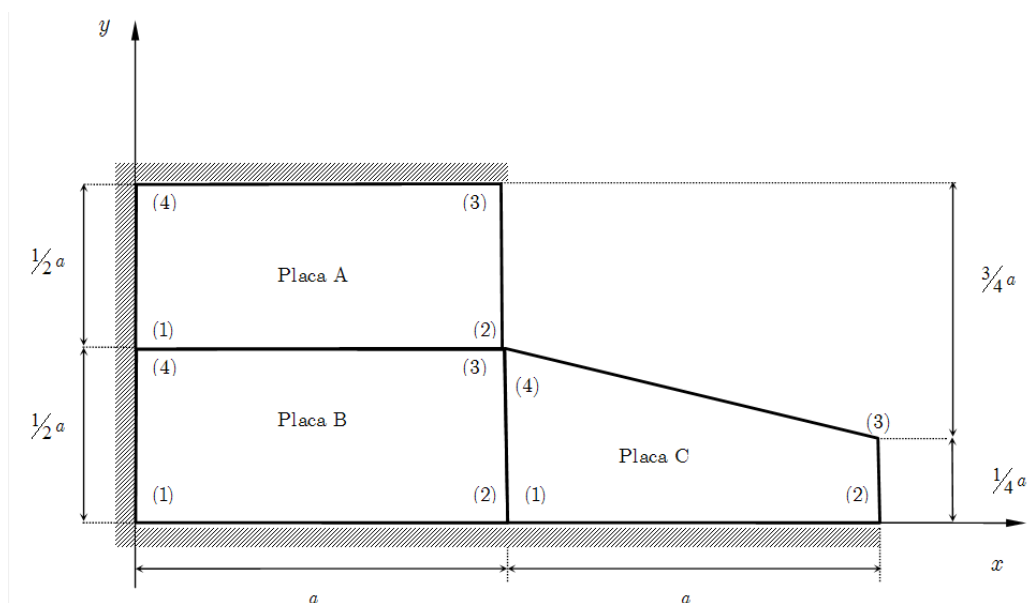


Figura 4b: Placa discretizada en tres macroelementos

Los valores de los tres primeros coeficientes dimensionales de frecuencia para la placa isótropa y laminada son los que se resumen en Tabla 3.

Tabla 3: Valores de los tres primeros coeficientes de frecuencias  $\Omega_i = \omega_i a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$  de la estructura de Fig. 4

	Frecuencia 1	Frecuencia 2	Frecuencia 3	Frecuencia 4
Placa isótropa	23,51056	31,91444	42,73982	55,73500
Placa laminada				
0,30,0	39,20399	57,22469	81,67730	103,89193
0,45,0	39,35864	57,38914	81,81391	104,27141
0,90,0	39,93704	57,82626	82,06063	105,34113

Con fines ilustrativos, se muestran las formas modales asociadas de la placa considerada isótropa, en las Figuras 5 a 8 (se tomó como ejemplo  $a = 4$ ).

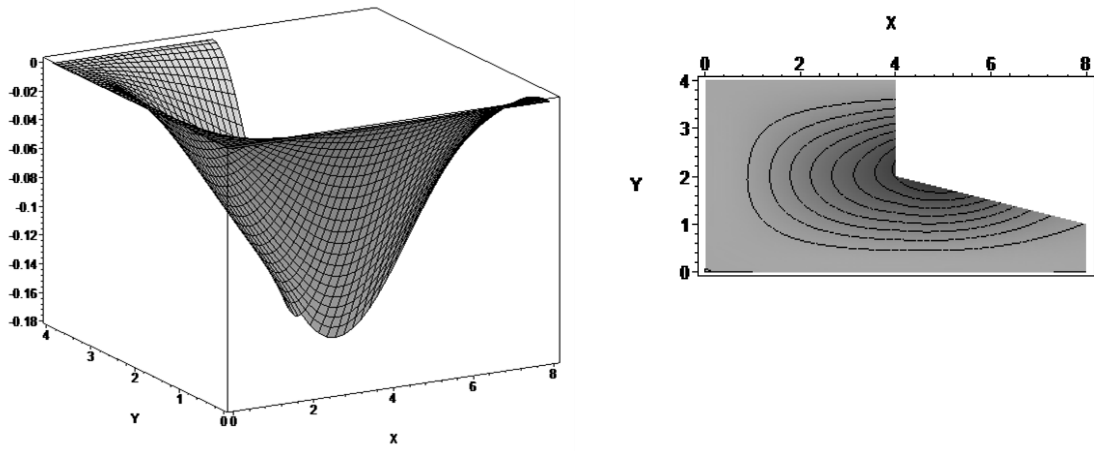


Figura 5: Forma modal asociada a  $\Omega_1$

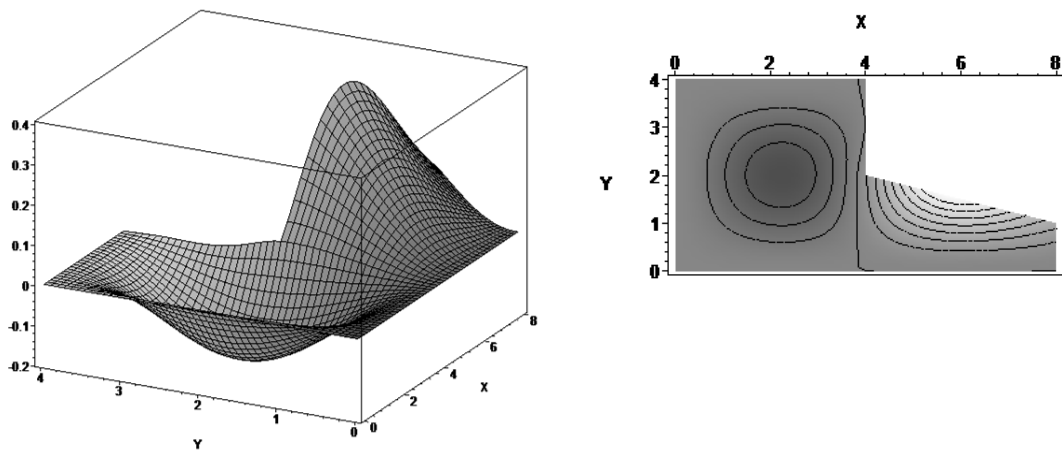


Figura 6: Forma modal asociada a  $\Omega_2$

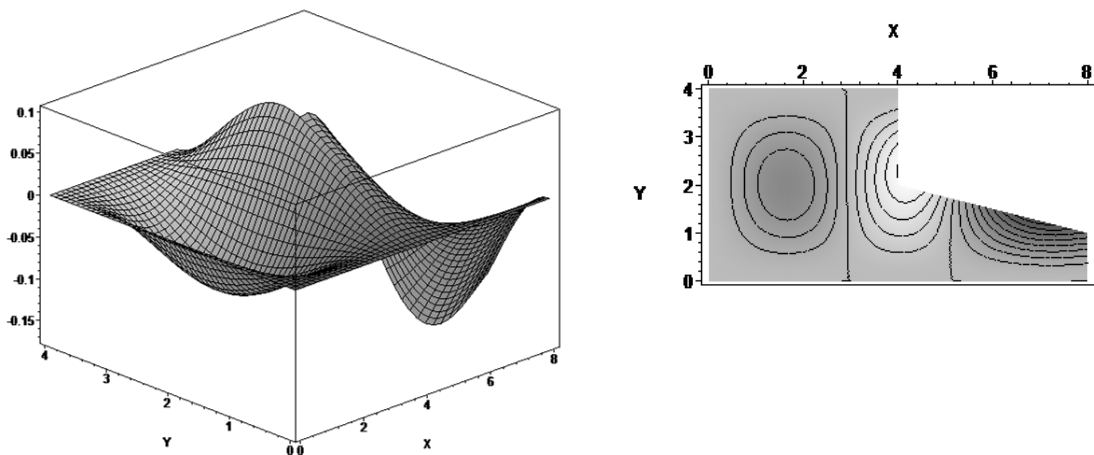


Figura 7: Forma modal asociada a  $\Omega_3$

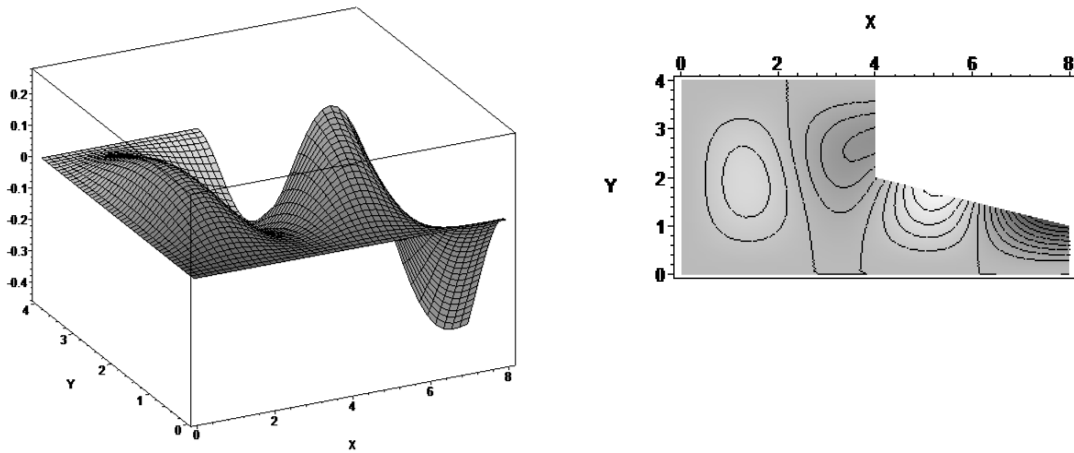


Figura 8: Forma modal asociada a  $\Omega_4$

Algunos valores de deflexiones estáticas de la estructura correspondientes a una carga vertical uniformemente distribuida se muestran en la Tabla 4, tanto para la placa de material isótropo como laminado (con ángulos de inclinación de las fibras  $\beta = 30^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$  y  $\beta = 90^\circ$ ).

Tabla 4: Valores de los coeficientes de deflexión  $\tilde{w}_{(x_i, y_i)} = w_{(x_i, y_i)} \frac{D}{qa^4}$  de la estructura de Fig. 4

	punto a (2a , 0.25a)	punto b (a , 0.5a)	punto c (0.5a , 0.5a)	punto d (a, 0.25a)
Placa isótropa	0,000806745	0,003003683	0,001937195	0,001435145
Placa laminada				
0,30,0	0,002117481	0,006856578	0,003987181	0,003309322
0,45,0	0,002116139	0,006815916	0,003964420	0,003289367
0,90,0	0,002036793	0,006608259	0,003875722	0,002899421

Para el caso de material isótropo,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ .

Para el caso de anisotropía,  $D = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}$ .

## 9. CONCLUSIONES

En este artículo se presenta el desarrollo, formulación e implementación computacional de un elemento finito de lámina enriquecido y su incorporación en un programa global de elementos finitos. Se ha formulado el elemento particularizado para su aplicación a placas delgadas isótropas y anisótropas con esquema de laminación simétrico. Se ha demostrado, a través de ejemplos aplicados al análisis estático y dinámico de placas que se obtienen muy buenos resultados. Además, es posible alcanzar una buena precisión usando un número bajo de polinomios y sin necesidad de densificar el



mallado, ventaja ésta de notoria utilidad ya que permite reducir los tiempos de cálculo y el costo computacional de pre y post proceso.

## **AGRADECIMIENTOS**

Este trabajo se realizó con el apoyo del CONICET, Aula CIMNE – Facultad de Ingeniería UNSa y Consejo de Investigación de la UNSa.

## **REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- Bardell, N.S., Dunsdon, J.M., and Langley, R.S. (1996). *Free vibration analysis of thin coplanar rectangular plate assemblies – Part I: theory, and initial results for specially orthotropic plates*. Composite Structures, 34, p. 129–143.
- Bardell, N.S., Dunsdon, J.M., and Langley, R.S. (1995). *Free vibration analysis of thin rectangular laminated plate assemblies using the h-p version of the finite element method*. Composite Structures, 32, p. 237–246.
- CSI Analysis Reference Manual. (2004). Computers and Structures, Inc. Berkeley, California, USA.
- Nallim, L.G., Grossi, R.O. (2003). *On the use of orthogonal polynomials in the study of anisotropic plates*. Journal of Sound and Vibration, 264, p. 1201-1207.
- Nallim, L.G., Oller, S., Grossi, R.O. (2005). *Statical and dynamical behaviour of thin fibre reinforced composite laminates with different shapes*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194, p. 1797-1822.
- Nallim, L. G., Oller, S. (2008). *An analytical - numerical approach to simulate the dynamic behaviour of arbitrarily laminated composite plate*. Composite Structures Journal, 85, p. 311–325.
- Oñate Ibáñez de Navarra, E. (1992). *Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, España.
- Rango, R. F., Nallim, L. G., Oller, S. (2009). *Desarrollo de un elemento finito jerárquico para placas utilizando polinomios de Gram-Schmidt*. Mecánica Computacional Vol XXVIII, p. 747–766.
- Reddy, J.N. (1993). *Finite Element Method*. McGraw Hill.
- Reddy, J.N. (1997). *Mechanics of Laminated Composite Plates. Theory and Analysis*. CRC Press.
- Zienkiewicz, O.C. (1980). *El Método de los Elementos Finitos*. Reverté.

# FORMULATION AND ASSEMBLY OF HIERARCHICAL FINITE ELEMENTS TO THE STATIC AND DYNAMIC ANALYSIS OF LAMINATED QUADRILATERAL PLATES

## Abstract

The formulation and the process of assembly of finite elements enriched with Gram-Schmidt orthogonal polynomials for the study of anisotropic plates is presented in this work. This assembly allows the static and free vibration analysis of laminated plates of generic geometric shape; its planform is split into quadrilateral finite macro-elements. An isoparametric approximation is used to consider various geometric shapes and then, the elements are assembled. The element mass and stiffness matrices, and the element load vector are ordered identifying nodal, edge and purely internal degrees of freedom, for finally obtaining the global matrices and the global vector of the structure. The obtained formulation is useful for working with any combination of classical boundary conditions, point supported corner, simply supported, clamped or free edges. Thus, by combining the displacement field approximation, the mapping technique and the assembly technique a general formulation is obtained. This formulation has been implemented in a finite element computer program to find natural frequencies, their associated modal shapes and static deflections of different plates. Furthermore, convergences and stabilities of results are analyzed, which suggest that this methodology produces very good solutions. The main advantage of the developed method is that it does not require a dense mesh to improve the approximation, being especially important in great scale and optimization structural problems.

*Keywords: laminated plates, enriched finite element, assembly, static analysis, free vibration*

## CONCLUSIONS

This article presents the development, formulation and computational implementation of an enriched plate element and its incorporation into a global finite element program. This element has been formulated and particularized for thin isotropic and anisotropic plates, with symmetric lamination scheme, and it is tested through the static and dynamic analysis in some numerical examples, producing very good results. It is possible to achieve very good accuracy in the results using a low number of polynomials and without densify the mesh. It is a useful advantage because it reduces the computation time and computational cost of pre and post processing.